

AUTOMATIQUE THÉORIQUE. — *Distributions invariantes commandées pour les systèmes non linéaires en temps discret.* Note de **Jessy W. Grizzle**, présentée par **Bernard Picinbono**.

La recherche des lois de bouclage en temps continu pour résoudre divers problèmes fondamentaux d'automatique comme le découplage non linéaire s'appuie aujourd'hui sur le concept clé de distributions invariantes commandées, issues de la géométrie différentielle. Cette Note montre comment étendre naturellement cette notion aux systèmes non linéaires en temps discret.

AUTOMATION (THEORETICAL). — Controlled invariant distributions for discrete time nonlinear system.

Controlled invariant distributions have proven to be of fundamental importance in the resolution of diverse problems arising in the control of nonlinear continuous time systems. This Note shows how these objects can be naturally extended to discrete time nonlinear control systems.

INTRODUCTION. — Pour les systèmes non linéaires en temps continu, il existe grosso modo deux approches, l'une algébrique, l'autre géométrique qui, toutes deux, conduisent à une compréhension approfondie. Rappelons que les méthodes algébriques ont récemment été généralisées au cas discret, permettant ainsi de résoudre plusieurs problèmes spécifiques ([1], [2]). Cette Note propose l'extension des techniques de géométrie différentielle au cas discret.

Plus précisément, on considèrera les systèmes en temps discret où l'espace d'état est une variété lisse. Cette généralité a ici une grande importance parce que, contrairement aux systèmes en temps continu, les systèmes en temps discret ont un caractère non local : en une seule itération, même avec des entrées petites, le système peut sortir d'une carte locale quelconque. Dans ce cadre de géométrie différentielle, on introduira les distributions invariantes, objets reliés étroitement à l'idée classique dans l'automatique d'un sous-système. Enfin, le problème de modifier le comportement d'un système par un bouclage (non singulier), pour qu'une distribution donnée devienne invariante, est étudié. Le lien pratique de ceci est que, dans le problème de rejet des perturbations par exemple, on veut confiner les perturbations à un sous-système non observable en se servant d'un bouclage.

2. PRÉLIMINAIRES. — On introduit un cadre de géométrie différentielle pour l'étude des systèmes en temps discret et on définit les distributions invariantes ainsi que les distributions invariantes commandées.

DÉFINITION 2.1. — Un système non linéaire en temps discret Σ est la donnée de deux variétés connexes M et U et d'une application $f : M \times U \rightarrow M$. Le système Σ est dit C^∞ (ou C^m) si M , U et f le sont. La dynamique de Σ est définie par :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad \text{où } x_{k+1}, x_k \in M \quad \text{et } u_k \in U.$$

DÉFINITION 2.2. — Un bouclage est une application (soit C^∞ , soit C^m) $\gamma : M \times U \rightarrow U$ telle que, pour tout $x \in M$, $\gamma(x, \cdot) : U \rightarrow U$ soit un difféomorphisme. γ est un bouclage local s'il existe deux ouverts $O \subset M$ et $V \subset U$ tel que $\gamma : O \times V \rightarrow V$ soit un bouclage.

Les systèmes en temps discret étant de nature non locale, on doit en général utiliser une *paire* de cartes locales (des coordonnées) pour effectuer les calculs. Fixons donc $(x_0, u_0) \in M \times U$ et considérons $f(x_0, u_0)$. Soit $(\tilde{V}_M, \tilde{\varphi}_M)$ une carte locale autour de $f(x_0, u_0)$ et soit $(V_M \times V_U, \varphi_M \times \varphi_U)$ une carte locale autour de (x_0, u_0) telle que $V_M \times V_U \subset f^{-1}(\tilde{V}_M)$. Dans la suite, les coordonnées ainsi construites $(V_M \times V_U, \varphi_M \times \varphi_U)$

et $(\tilde{V}_M, \tilde{\varphi}_M)$ s'appelleront une paire de cartes locales [autour de (x_0, u_0)] et seront notées simplement (x, u) et non $(x, u), (\tilde{x})$. Cette notation appelle deux commentaires : tout d'abord, remarquons que V_M et \tilde{V}_M peuvent ou non coïncider. S'il faut distinguer entre les deux domaines de x , on précisera V_M ou \tilde{V}_M dans la notation originale. De plus, si $f(x_0, u_0) = x_0$, on pourra toujours choisir (V_M, φ_M) et $(\tilde{V}_M, \tilde{\varphi}_M)$ de telle façon que $V_M \subset \tilde{V}_M$ et que $\varphi_M \equiv \tilde{\varphi}_M/V_M$. On retrouve ainsi la situation plus habituelle des systèmes en temps continu.

3. DISTRIBUTION INVARIANTES. — Soit Δ une distribution involutive de rang constant et soit (\mathcal{F}, Δ) son feuilletage associé [3] dans M . En temps continu (\mathcal{F}, Δ) est dit invariant si la dynamique fait passer d'une feuille à une autre, éventuellement confondue. Il en est de même en temps discret; (\mathcal{F}, Δ) est dit invariant si $f(\cdot, u)$ fait passer d'une feuille à une autre, éventuellement confondue. Des considérations locales amènent à la définition suivante :

DÉFINITION 3.1. — Soient Δ une distribution involutive (pas nécessairement de rang constant) et Σ un système non linéaire en temps discret. Δ est une distribution invariante de Σ si $f(\cdot, u)_* \Delta \subset \Delta$; c'est-à-dire, si pour chaque champ de vecteurs $X \in \Delta$, $f(\cdot, u)_* X(x) \subset \Delta(f(x, u))$ [$(f(x, u))_*$ est l'application tangente de $f(\cdot, u) : M \rightarrow M$].

L'intérêt principal de telles distributions découle de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — Soit Δ une distribution invariante de Σ , de rang constant. Alors dans une paire de cartes locales adaptées à Δ , Σ se décompose en deux sous-systèmes :

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_{k+1}^1 = f^1(x_k^1, u_k) \\ x_{k+1}^2 = f^2(x_k^1, x_k^2, u_k). \end{cases}$$

On sait qu'en temps continu de telles décompositions sont à la base des solutions à divers problèmes classiques d'automatique [4].

Supposons maintenant que la distribution Δ ne soit pas nécessairement invariante. Comment modifier le comportement du système par un bouclage pour que Δ soit invariante pour le système bouclé ?

DÉFINITION 3.2. — Soient Δ une distribution involutive et Σ un système. Δ est dite distribution invariante commandée (localement) s'il existe un bouclage (local) γ tel que Δ soit une distribution invariante du système bouclé $f_\gamma(x, v) = f(x, \gamma(x, v))$.

Le résultat principal caractérisant les distributions invariantes commandées localement est le suivant, où $\pi : M \times U \rightarrow M$ représente la projection canonique et :

$$V(M \times U) = \{X \in T(M \times U) \mid \pi_* X = 0\}.$$

Pour les résultats analogues en temps continu, voir [5]-[8].

THÉORÈME 3.1. — Soit Δ une distribution involutive C^∞ . Une condition nécessaire pour que Δ soit invariante commandée localement est que :

$$(3.2) \quad f_*(x, u)X \subset \Delta(f(x, u)) + f_*(x, u)V(M \times U),$$

$\forall X \in \pi_*^{-1}(\Delta)$. De plus, si Δ et $f_*^{-1}(\Delta) \cap V(M \times U)$ sont de rang constant et si $f(x, \cdot) : U \rightarrow M$ est de rang plein, alors la condition (3.2) est aussi suffisante.

Avec des systèmes analytiques, il vient :

THÉORÈME 3.2. — Soit Δ une distribution involutive C^ω . Si Δ est invariante commandée localement, alors l'équation (3.2) est satisfaite. Si (3.2) est satisfaite, il existe un ouvert dense de M et un ouvert dense de $M \times U$ dans lesquels Δ est invariante commandée localement.

Esquisse de la preuve du théorème 3.1.

Si Δ est invariante commandée localement, l'équation (3.2) est triviale dans une paire de cartes locales. Réciproquement, on démontre que (3.2) entraîne localement l'existence d'une distribution E sur $M \times U$ telle que $f_* E \subset \Delta$, $\pi_* E = \Delta$ avec un rang égal au rang de Δ . En considérant $\pi : M \times U \rightarrow M$ comme un espace fibré (c'est-à-dire que les coordonnées de U peuvent dépendre de $x \in M$), le théorème de Frobenius implique l'existence d'une paire de cartes locales (x, v) telle que E soit le relèvement trivial de Δ par rapport à ces coordonnées [3]. Donc, $f(\cdot, v)_* \Delta \subset \Delta$ pour tout v constant. Or, la paire (x, v) est reliée à une paire de cartes locales (x, u) où les coordonnées de U ne dépendent pas de x par une transformation non singulière. On montre que cette transformation est le bouclage cherché.

Le théorème 3.2 se démontre de la même façon.

4. DISTRIBUTIONS INVARIANTES COMMANDÉES MAXIMALES. — En examinant de près les méthodes géométriques dans le cadre des systèmes en temps continu [4], on constate qu'il est souvent avantageux d'utiliser les distributions invariantes commandées maximales. L'étude de telles distributions en temps discret conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 4.1. — Soit Δ une distribution (C^∞ ou C^ω). On dit que Δ satisfait la condition d'invariance locale commandée si pour tout $X \in \pi_*^{-1}(\Delta)$:

$$(4.1) \quad f_*(x, u)X \subset \Delta(f(x, u)) + f_*(x, u)V(M \times U).$$

LEMME 4.1. — Soient Δ^1 , Δ^2 et Δ trois distributions qui satisfont la condition d'invariance locale commandée. Alors, $\Delta^1 + \Delta^2$ satisfait aussi cette condition et $\bar{\Delta}$, la fermeture involutive de Δ , la satisfait aussi dans les ouverts de M et U où les hypothèses (de rang constant) du théorème 3.1 sont satisfaites.

Ce lemme permet d'énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1. — Soit K une distribution involutive sur M . Alors il existe une plus grande distribution Δ^* appartenant à K qui satisfait la condition d'invariance locale commandée. En outre, dans les ouverts de M et U où les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, Δ^* est invariante commandée localement.

5. UN EXEMPLE PÉDAGOGIQUE. — Considérons un système Σ avec dynamique :

$$f(x, y, z, u, w) = \begin{bmatrix} xy, \\ z + xyw^3, \\ (x+1)(zw)^2 \end{bmatrix},$$

où (x, y, z) sont les coordonnées rectangulaires de l'espace d'état $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ et où (u, w) sont les coordonnées rectangulaires de l'espace d'entrée $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Soit $\Delta = \text{span} \{ \partial / \partial z \}$. Alors, un calcul facile montre que Δ n'est pas invariante, mais qu'elle

satisfait l'équation (3.2). De plus, on calcule :

$$f_*^{-1}(\Delta) \cap \pi_*^{-1}(\Delta) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{3xyu^2} \frac{\partial}{\partial u} \mid \frac{\partial}{\partial w} \right\}$$

et on vérifie que $f(x, y, z, \dots)$ est de rang plein. Δ est donc invariante commandée localement. Pour calculer le bouclage, il faut d'abord construire une distribution E de même rang que Δ telle que $f_*(E) \subset \Delta$ et $\pi_* E = \Delta$. Évidemment, on peut choisir :

$$E = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{3xyu^2} \frac{\partial}{\partial u} \right\}.$$

D'après le théorème de Frobenius, un bouclage $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$ rendant Δ invariante est une solution inversible quelconque de :

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial z} = \frac{-1}{3xy(\gamma^1)^2}, \quad \frac{\partial \gamma^2}{\partial z} = 0.$$

Une telle solution dans un voisinage de $x=y=z=u=w=1$ est :

$$\gamma^1(x, y, z, \bar{u}, \bar{w}) = \left(1 + \frac{\bar{u} - z - xy}{zy} \right)^{1/3},$$

$$\gamma^2(x, y, z, \bar{u}, \bar{w}) = \bar{w}.$$

Remarquons que l'application des techniques présentées dans cette Note permet de résoudre localement le problème de rejet des perturbations [9].

Je tiens à remercier chaleureusement M. Fliess et F. Lamnabhi-Lagarrigue pour leurs utiles conseils pendant la réalisation de ce travail au Laboratoire des Signaux et Systèmes, C.N.R.S.-E.S.E., 91190 Gif-sur-Yvette, laquelle a été possible grâce à une bourse de l'O.T.A.N.

Remise le 7 janvier 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D. NORMAND-CYROT, Théorie et pratique des systèmes non linéaires en temps discret, *Thèse de docteur d'état*, Orsay, 1983.
- [2] S. MONACO et D. NORMAND-CYROT, Sur la commande non interactive des systèmes non linéaires en temps discret, *Proc. Analysis and Optimization of Systems*, A. BENSOUSSAN and J.-L. LIONS éd., *Lect. Notes Contr. Inf.* n° 63, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [3] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [4] A. ISIDORI, The geometric approach to nonlinear feedback control: A survey dans *Lect. Notes Cont. Info. Sc.*, n° 44, Springer-Verlag, 1982.
- [5] R. M. HIRSCHORN, (A, B)-invariant distributions and disturbance decoupling of nonlinear systems, *S.I.A.M. J. Control and Optimization*, 19, n° 1, 1981, p. 1-19.
- [6] A. ISIDORI, A. J. KRENER, C. GORI-GIORGI et S. MONACO, Non linear decoupling via feedback: A differential geometric approach, *I.E.E.E. Trans. Auto. Contr.*, AC-26, n° 2, 1981, p. 331-345.
- [7] H. NIMEIJER et A. J. VAN DER SCHAFT, Controlled invariance for nonlinear systems, *I.E.E.E. Trans. Auto. Contr.*, AC-27, n° 4, 1982, p. 904-914.
- [8] W. M. WONHAM, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, 2nd., Springer-Verlag, New York, Applications of Mathematics, 1979.
- [9] J. W. GRIZZLE, Controlled invariance for discrete time systems with an application to the disturbance decoupling problem, soumis à *I.E.E.E. Trans. Auto. Contr.*

*Department of Electrical and Computer Engineering,
University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois 61801 U.S.A.*